BIR JINSLI ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI HAQIDA

Muzaffarova Mohinur Umarovna
Buxoro Davlat Universiteti
Fizika-matematika fakulteti talabasi

Annotatsiya. Maqola universitetlarning matematika ta’lim yo‘nalishi 2-bosqich talabalariga o‘tiladigan differensial tenglamalar fanining amaliy mashg‘ulotlari va nazorat masalalarida uchraydigan bir jinsli oddiy differensial tenglamalarni yechishga bag‘ishlangan. Talabalar mavzuni oson tushunishlari uchun bir nechta qiyinroq misollarni yechish algoritmlari keltirilib, sodda tarzda tushuntirilgan.

Kalit so‘zlar: bir jinsli tenglamalar, funksiyalar, to‘g‘ri chiziqlar, o‘zgaruvchilarga ajtratish, integrallash.

ON THE METHODS OF SOLVING HOMOGENOUS ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Muzaffarova Mohinur Umarovna
Bukhara State University
Student of the Faculty of Physics and Mathematics

Annotation. The article is devoted to the solution of homogeneous simple differential equations in the practical lessons and exam problems of differential equations for the sophomore students of mathematics education of universities. Algorithms for solving several more complex examples are provided and explained in a simple manner so that students can easily understand the topic.

Keywords: homogeneous equations, functions, straight lines, differentiation into variables, integration.

KIRISH

Bir jinsli tenglamalar $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ shaklida hamda $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ shaklida yozilishi mumkin. Bu yerda $M(x,y)$ va $N(x,y)$ bir xil darajadagi bir jinsli funksiyalardir [1-3]. Bir jinsli tenglamani yechish uchun $y = tx$ almashtirishni qo‘llash mumkin, shundan so‘ng o‘zgaruvchilarga ajraladigan tenglamaga ega bo‘lamiz.

Mazkur turdagi misollarni yechishda talabalar integrallash bo‘yicha qiyinchilikka duch kelishadi. Bunga sabab ularning hosila olish mavzulari bo‘yicha tushunchalari kamligi hisoblanadi.

Integrallash va hosilani hisoblashni sodda tushuntirishga oid maqolalar chop qilingan [4]. Mavzuni tushunish ancha oson bo‘lishi uchun ushbu maqolani o‘qish tavsiya qilinadi.

Ushbularni inobatga olib, bir qator misollarni yechish yo‘llarini keltiramiz.

ASOSIY QISM

1-misol. Tenglamani yeching $xdy = (x+y)dx$

Yechish. Bu bir jinsli tenglama. $y = tx$ belgilash kiritamiz. Shunda $dy = xdt + tdx$ ni tenglamaga qo‘yamiz va quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$x(xdt + tdx) = (x+tx)dx; \quad xdt = dx.$$

O‘zgaruvchilarga ajraladigan tenglamani yechamiz:

$$dt = \frac{dx}{x}; \quad t = ln|x| + C.$$

Avvalgi y o‘zgaruvchiga qaytamiz

$$y = x(ln|x| + C).$$

x ga bo‘lish vaqtida yo‘qolgan $x = 0$ yechim ham mavjud.

$y' = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c})$ tenglama bir jinsli tenglama ko‘rinishiga koordinatalar boshini $ax + by + c = 0$ va $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasiga ko‘chirish orqali keltiriladi. Agar to‘g‘ri chiziqlar kesishmasa, u holda $a_1x + b_1y = k(ax + by)$. Bundan kelib chiqidaki, tenglama

$$y' = F(ax + by)$$

ko‘rinishga keladi va $z = ax + by$ (yoki $z = ax + by + c$) belgilash kiritish bilan bo‘linadigan o‘zgaruvchili tenglamaga keltiriladi.

2-misol. Tenglamani yeching: $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$.

Yechish. Tenglamani x ga bo‘lib, bir jinsli tenglama ko‘rinishiga keltiramiz:

$$\left(1 - \frac{y}{x}\right)dx + \left(1 + \frac{y}{x}\right)dy = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{y}{x} - 1)}{(\frac{y}{x} + 1)}.$$

Tenglama bir jinsli bo‘ldi. $y = tx$ belgilash kiritamiz va hosilasini topamiz:

$$\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}.$$

Endi bularni tenglamaga qo‘yamiz

$$t + x\frac{dt}{dx} = \frac{t-1}{t+1} \Rightarrow x\frac{dt}{dx} = \frac{t-1}{t+1} - t \Rightarrow$$

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{t-1}{t+1} - \frac{t^2+t}{t+1} \Rightarrow x\frac{dt}{dx} = -\frac{t^2+1}{t+1}.$$

Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama. O‘zgaruvchilarni ajratib, tenglamaning ikkkala tomonini ham integrallaymiz:

$$-\frac{t+1}{t^2+1}dt = \frac{1}{x}dx \Rightarrow -\int \frac{t+1}{t^2+1}\,dt = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow$$

$$-\int \frac{1}{t^2+1}dt - \int \frac{t}{t^2+1}\,dt = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow$$

$$-\int \frac{1}{t^2+1}dt - \frac{1}{2}\int \frac{t}{t^2+1}\,d(t^2+1) = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow$$

$$-arctgt - \frac{1}{2}ln|t^2+1| = ln|x| + lnC.$$

Endi t ni o‘rniga $\frac{y}{x}$ ifodani etib qo‘yamiz:

$$-arctg\frac{y}{x}-\frac{1}{2}ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right|=ln|x|+lnC,$$

$$-arctg\frac{y}{x}-\frac{1}{2}ln\left|\frac{y^2+x^2}{x^2}\right|=ln|x|+lnC,$$

$$-arctg\frac{y}{x}-\frac{1}{2}(ln|y^2+x^2|-ln|x^2|)=ln|x|+lnC,$$

$$-arctg\frac{y}{x}-\frac{1}{2}ln|y^2+x^2|+ln|x|=ln|x|+lnC,$$

$$ln|y^2+x^2|=C_1-2arctg\frac{y}{x}$$

x ga bo‘lish vaqtida $x=0$ yechim yo‘qolishi mumkin. Lekin $x=0$ tenglamani yechimi emas.

Javob: $ln|y^2+x^2|=C_1-2arctg\frac{y}{x}$.

3-misol. Tenglamani yeching: $2x^3y'=y(2x^2-y^2)$.

Yechish. Tenglamani $2x^3$ ga bo‘lib, bir jinsli tenglama ko‘rinishiga keltiramiz:

$$y'=\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^3.$$

Tenglama bir jinsli bo‘ldi. $y=tx$ belgilash kiritamiz va hosilasini topamiz:

$$y'=t+xt'$$

Hosil bo‘gan qiymatlarni tenglamaga qo‘yamiz

$$t+xt'=t-\frac{t^3}{2}\ \Rightarrow\ xt'=-\frac{t^3}{2}\ \Rightarrow x\frac{dt}{dx}=-\frac{t^3}{2}.$$

Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama. O‘zgaruvchilarni ajratib, tenglamaning ikkkala tomonini ham integrallaymiz:

$$-2\frac{1}{t^3}\,dt=\frac{1}{x}dt\ \Rightarrow-\int 2\frac{1}{t^3}\,dt=\int\frac{1}{x}dt\Rightarrow$$

$$\frac{1}{t^2}=ln|x|+ln|C|\ \Rightarrow\frac{1}{t^2}=ln|Cx|.$$

Belgilangan qiymatni qaytadan tenglamaga keltirib qo‘yamiz:

$$\frac{x^2}{y^2}=ln|Cx|\ \Rightarrow\ x=\pm y\sqrt{ln|Cx|}$$

Bo‘lish vaqtida $t=0\ (y=0)$ va $x=0$ yechimlar yo‘qolishi mumkin. Tenglamadan ma’lumki, $y=0$ yechim, $x=0$ esa yechim bo‘la olmaydi.

Javob: $x=\pm y\sqrt{ln|Cx|}\,;y=0$.

4-misol. Tenglamani yeching: $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$.

Yechish. Tenglamani bir jinsli ko‘rinishiga keltiramiz.

$$y'=\frac{y}{x}-e^{\frac{y}{x}}.$$

Tenglama bir jinsli bo‘ldi. $y=tx$ belgilash kiritamiz va hosilasini topamiz:

$$y'=t+xt'.$$

Hosil bo‘gan qiymatlarni tenglamaga qo‘yamiz

$$t + xt' = t - e^t \;\Rightarrow\; t' = -\frac{e^t}{x}.$$

Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama. O‘zgaruvchilarni ajratib, tenglamaning ikkkala tomonini ham integrallaymiz:

$$\frac{1}{e^t}\,dt = -\frac{1}{x}dt \;\Rightarrow\; e^{-t}dt = -\frac{1}{x}dt \;\Rightarrow$$

$$\int e^{-t}dt = \int -\frac{1}{x}dt \;\Rightarrow\; e^{-t} = -\,ln|x| + lnC \;\Rightarrow$$

$$e^{-t} = lnCx \;\Rightarrow\; -t = lnlnCx.$$

Belgilangan qiymatni qaytadan tenglamaga keltirib qo‘yamiz:

$$-\frac{y}{x} = lnlnCx \;\Rightarrow\; y = -xlnlnCx.$$

Bo‘lish vaqtida $x = 0$ yechim yo‘qolishi mumkin. Lekin $x = 0$ bu tenglama uchun yechim emas.

Javob: $y = -xlnlnCx$

5-misol. Tenglamani yeching: $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

Yechish. Tenglamani bir jinsli ko‘rinishiga keltiramiz:

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}.$$

Tenglama bir jinsli bo‘ldi. $y = tx$ belgilash kiritamiz va hosilasini topamiz:

$$y' = t + xt'.$$

Hosil bo‘gan qiymatlarni tenglamaga qo‘yamiz:

$$t + xt' = \sqrt{1 - t^2} + t \;\Rightarrow\; xt' = \sqrt{1 - t^2} \;\Rightarrow t' = \frac{\sqrt{1 - t^2}}{x}.$$

Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama. O‘zgaruvchilarni ajratib, tenglamaning ikkkala tomonini ham integrallaymiz:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}dt = \frac{1}{x}dx \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}dt = \int \frac{1}{x}dx \;\Rightarrow$$

$$arcsin\, t = lnCx.$$

Belgilangan qiymatni qaytadan tenglamaga keltirib qo‘yamiz:

$$arcsin\frac{y}{x} = lnCx.$$

Bo‘lish vaqtida $t = \pm 1\ (y = \pm x)$ va $x = 0$ yechimlar yo‘qolishi mumkin. Tenglamadan ma’lumki, $y = \pm x$ yechim, $x = 0$ esa yechim bo‘la olmaydi.

Javob: $\arcsin\frac{y}{x} = lnCx;\ y = \pm x.$

Ba’zi tenglamalarni $y = z^m$ belgilash kiritish orqali bir jinsli tenglamaga keltiriladi. Odatda m soni noma’lum bo‘ladi. m ni topish uchun $y = z^m$ belgilash kiritish kerak. Tenglamaning bir jinsli bo‘lishini talab qilib, agar iloji bo‘lsa m sonini topamiz. Agar buni amalga oshirishning iloji bo‘lmasa, unda tenglama bu tarzda bir jinsli tenglama holiga keltirilmaydi.

6-misol. Tenglamani yeching: $x^3(y' - x) = y^2$.

Yechish. Tenglamani bir jinsli emas. Tenglamani o‘zgartiramiz:

$$y' = \frac{y^2}{x^3} + x \Rightarrow y' = \frac{y^2 + x^4}{x^3} \Rightarrow x^3 dy = (y^2 + x^4)dx.$$

$y = z^m$ belgilash kiritamiz va hosilasini topamiz:

$$y' = mz^{m-1}z'.$$

Hosil bo‘gan qiymatlarni tenglamaga qo‘yamiz:

$$x^3 mz^{m-1}dz = (z^{2m} + x^4)dx$$

$m = 2$ bo‘lganda tenglama bir jinsli bo‘ladi:

$$2x^3 zdz = (z^4 + x^4)dx.$$

Tenglamani o‘zgartiramiz:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\frac{z^3}{x^3} + \frac{1}{2}\frac{x}{z}.$$

$y = tx$ belgilash kiritamiz va hosilasini topamiz:

$$\frac{dz}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}.$$

Hosil bo‘gan qiymatlarni tenglamaga qo‘yamiz:

$$t + x\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2t} \Rightarrow x\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\frac{t^4 - 2t^2 + 1}{t} \Rightarrow$$

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\frac{(t^2-1)^2}{t}.$$

Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama. O‘zgaruvchilarni ajratib, tenglamaning ikkkala tomonini ham integrallaymiz:

$$\frac{2t}{(t^2-1)^2}dt = \frac{1}{x}dx \Rightarrow \int \frac{2t}{(t^2-1)^2}dt = \int \frac{1}{x}dx.$$

Chap tomondagi integralni hisoblaymiz:

$$\frac{2t}{(t^2-1)^2} = \frac{2t}{(t-1)^2(t+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(t+1)^2},$$

$$\int \frac{1}{2}\frac{1}{(t+1)^2}dt - \int \frac{1}{2}\frac{1}{(t+1)^2}dt = \int \frac{1}{x}dx,$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{(t-1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(t-1)} = lnx + lnC,$$

$$\frac{1}{1-t^2} = lnCx \Rightarrow (1-t^2)lnCx = 1.$$

Belgilangan qiymatni qaytadan tenglamaga keltirib qo‘yamiz:

$$\left(1 - \frac{z^2}{x^2}\right)lnCx = 1 \Rightarrow \frac{x^2 - z^2}{x^2}lnCx = 1 \Rightarrow$$

$$(x^2 - z^2)lnCx = x^2.$$

Belgilangan qiymatni qaytadan tenglamaga keltirib qo‘yamiz:

$$(x^2 - y)lnCx = x^2.$$

Bo‘lish vaqtida $t^2 = 1\ (y = x^2)$ va $x = 0$ yechimlar yo‘qolishi mumkin. Tenglamadan ma’lumki, $y = x^2$ yechim, $x = 0$ esa yechim bo‘la olmaydi.

Javob: $(x^2 - y)lnCx = x^2;\ \ y = x^2.$

Yuqorida keltirilganlardan kelib chiqib, bir jinsli oddiy differensial tenglamalarni yechish uchun quyidagi algoritm taklif qilinadi.

1. Avvalo, yechilgan differensial tenglama bir jinsli ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Buning uchun uni $y = f(x,y)$ standart shaklda taqdim etishimiz kerak, keyin $f(x,y)$ funksiyada x va y o‘zgaruvchilarni tx, ty bilan almashtiramiz. Agar elementar o‘zgarishlardan so‘ng $f(x,y)$ funksiyaga qaytish mumkin bo‘lsa, u holda berilgan differensial tenglama bir jinsli va $f(x,y) = f(x/y)$ bo‘ladi. Agar bunga erishish imkonsiz bo‘lsa, unda bu differentsial tenglama boshqa usul bilan yechilishi kerak.

2. $f(u)$ funksiyani, $f(x/y)$ funksiya uchun $y = ux$ ni almashtirish orqali topamiz, so‘ngra $f(u) - u$ funksiyani yozamiz.

3. $I = \int \frac{du}{f(u)-u}$ integralni topamiz va umumiy yechimni $I = ln\,|xC|$ shaklida yozamiz.

4. $u = \frac{y}{x}$ teskari almashtirishni amalga oshiramiz va soddalashtiramiz.

5. Biz o‘zgaruvchilarni bo‘lishda yo‘qolishi mumkin bo‘lgan maxsus yechimlarni topamiz.

Shu algoritm bo‘yicha quyidagi misolni yechib ko‘rsatamiz.

7-misol. Differensial tenglamani yeching:

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = 2 + \frac{y}{x}.$$

Yechish. Ushbu differensial tenglamaning tashqi ko‘rinishiga ko‘ra, uni darhol bir jinsli deb tasniflash mumkin.

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = 2 + \frac{y}{x}$$

funksiya uchun $y = ux$ almashtirishni amalga oshiramiz va $f(u) = 2 + \frac{ux}{x} = 2 + u$ ekanligidan

$$f(u) - u = 2 + u - u = 2$$

funksiyani topamiz.

Integralni hisoblaymiz:

$$I = \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{du}{2} = \frac{u}{2}.$$

Umumiy yechimni $\frac{u}{2} = ln|xC|$ shaklida yozamiz.

$u = \frac{y}{x}$ teskari almashtirishni amalga oshiramiz va $\frac{y}{2x} = ln|xC|$ yoki $y = 2x\,ln|xC|$ ga ega bo‘lamiz.

$f(u) - u = 2$ bo‘lgani uchun, bu differensial tenglama maxsus yechimlarga ega emas.

XULOSA

Kelgusida talabalar o‘tiladigan mavzularni oson tushunishlari uchun quyidagilarni tavsiya sifarida keltirish mumkin.

Oliy ta’lim muassasalari o‘qituvchilari talabalarga nafaqat mavzular bo‘yicha, balki kelgusida ularning bilimli va malakali o‘qituvchi bo‘lib yetishlari uchun quyidagi yo‘nalishlarda yanada ham chuqurroq bilimlar berishlari maqsadga muvofiq bo‘lar edi:

– O‘zbekistonlik matematiklarning differensial tenglamalar rivojiga qo‘shgan xissalari haqida talabalarga tushuncha berish;

– differensial tenglamalarni o‘qitish bo‘yicha jahon, respublika, viloyat miqiyosidagi ilg‘or pedagogik tajribalar bilan tanishtirish va shular asosida dars ishlanmalarini yaratish, mavjudlarini qo‘llay olish tajribasini talabalarga o‘rgatish;

– differensial tenglamalarni o‘qitishda yangi pedagogik va axborot texnologiyalaridan foydalanishni talabalarga o‘rgatish;

– iqtidorli talabalarni aniqlash, saralash va ularga tabaqalashgan ta'lim berish yo‘llari, shakllari hamda usullari bilan tanish bo‘lishi va ularni amalda qo‘llay bilishni mukammallashtirish;

– to‘garaklar, kechalar, olimpiadalarni tashkil qilish va ularni o‘tkazish;

– differensial tenglamalar darslarini kuzatish va tahlil qilish malakasini talabalarga o‘rgatish.

Hozirgi talabalarning mehnat faoliyati XXI asrda o‘tmoqda, demak, ularning yangi asrga qanday bilimlar bilan kirib borishi o‘ta muhimdir. Bu esa ta’lim dasturlari, darsliklar va ularni yaratuvchi mualliflarga ham bog‘liq, shuning uchun o‘quv qo‘llanmalari, darsliklar milliy mafkura, umuminsoniy qadriyatlarga va boy o‘tmish merosimizga asoslangan bo‘lishi, shuningdek, davlat va milliy ehtiyojlarini qondirishga qaratilmog‘i lozim.

Oddiy differensial tenglamalar kursini yanada yaxshi o‘zlashtirishni amalga oshirish tadbirlaridan biri sifatida kelgusida quyidagi adabiyotlar majmuasi bo‘lishi zarurdir:

– o‘quv qo‘llanmasi yoki darsliklar (mavjudlrini yanada mukammallashtirish) yaratish;

– masalalar to‘plamini (didaktik materiallar, yozma nazoratt ishlari) tuzish;

– matematikaning zamonaviy yo‘nalishlaridan fakultativ kurslari uchun qo‘llanmalar yaratish;

– testlar to‘plamini yaratish`;

– kursdan tashqari ishlar uchun qo‘llanmalar yaratish.

Muallif tomonidan xususiy hosilali va oddiy differensial tenglamalarni o‘rganishga bag‘ishlangan maqolalar nashr qilingan [5-6]. Mazkur yo‘nalishda olib borilgan ilmiy izlanishlar jarayonida funksiyalarni integrallash, oddiy differensial tenglamalar va oddiy differensial tenglamalar sistemasini sifatiy tahlil qilishga bag‘ishlangan [7-8] maqolalar o‘rganilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR (REFERENCES)

1. Филлипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика, 2000 г., 177 с.

2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений, Издания стереотип, 2022 г.. 512 с.

3. Зайцев В. Полянин А. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2001 г., 576 с.

4. Muzaffarova Mohinur Umarovna. (2023). Aniq va aniqmas integrallar haqida tushunchalar. Journal of New Century Innovations, 35(1), 105–115. Retrieved from https://newjournal.org/index.php/new/article/view/8542.

5. Музаффарова М.У. Частные производные и дифференцирование функций нескольких переменных // «Pedagogs» international research journal, 41:1 (2023), стр. 35-43.
6. Музаффарова М.У. Методы построение дифференциального уравнения по заданному семейству кривых // Journal of Theory, Mathematics and Physics. 2:11 (2003), стр.27-32.
7. Muzaffarova Mohinur. (2023). Chiziqli oddiy differensial tenglamalarni yechish usullari haqida. Yosh Tadqiqotchi Jurnali, *2*(5), 3–11. Retrieved from https://2ndsun.uz/index.php/yt/article/view/600.
8. Muzaffarova Mokhinur Umarovna. About the Dynamics of a Dynamic System. Irish Interdisciplinary Journal of Science & Research. Volume 7, Issue 4, Pages 77-86, October-December 2023.