IKKINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN QO'YILGAN CHEGARAVIY MASALANING KORREKT YECHILISHI

A.H. Muqumov
Iqtisodiyot va pedagogika universiteti

Annatotsiya: Ikkinchi tartibli differensial tenglama uchun qo'yilgan chegaraviy masalaning korrekt yechilishiga bag'ishlangan bo'lib, ikkinchi tartibli elliptik differensial tenglamalarga qo'yilgan chegaraviy masalalarning kuchsiz va umumlashgan yechimi haqidagi ma'lumotlar keltirilgan.

Kalit so'zlar: Differensial, elliptic, operator, kuchsiz yechim, umumlashgan yechim, uzluksiz, gruppa, yarimgruppa.

Ushbu

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Hu(t), \quad 0 \le t \le T \le \infty \tag{1}$$

differensial tenglama uchun chegaraviy masala o'rganiladi.

Bunda $H(x,D)-$ikkinchi tartibli elliptik differensial operator bo'lib, bu operator

$$H(x,D) = -\Delta + q(x) \tag{2}$$

ko'rinishda. (2) operatordagi $q(x)$ haqiqiy o'zgaruvchili va haqiqiy qiymatli funksiya bo'lib, quyidagi munosabatni qanoatlantiradi:

$$\left|D^\alpha q(x)\right| \le \frac{C}{|x|^{1+|\alpha|+\tau}}, \quad 0 \le |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \le n, \ 0 < \tau < 1. \tag{3}$$

1-teorema. *Agar* $1 < p < \dfrac{n}{2+\tau}$ *bo'lsa, unda*

$$H^\alpha u = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} H\left(H + tI\right)^{-1} u\, dt, \quad u \in D(H)$$

fomula bilan aniqlangan $H^\alpha-$*operator kuchli uzluksiz chegaralangan yarim gruppani tashkil qiladi.*

1-ta'rif. Agar berilgan $H-$operatorning aniqlanish sohasi $D(H)$

$H-$operatorning qiymatlar sohasi E da zich bo'lib, $t \geq 0$ bo'lganda $\left(H+tI\right)^{-1}$ operator butun E fazoda aniqlangan bo'lib,

$$\left\|(H+tI)^{-1}\right\|_{L_p(R^n)} \leq \frac{C}{1+t} \quad (t \geq 0)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, unda $H-$operatorga normal pozitiv operator deyiladi.

Agar qaralayotgan $H-$operator pozitiv operator bo'lsa, unda operatorning kasr tartibli darajasi quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$H^{\alpha}u = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}H\left(H+tI\right)^{-1}u\,dt, \;\; u \in D\left(H\right), \; 0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1$$

2-ta'rif. Chiziqli chegaralangan operatorlar oilasi $V(t)$ t parametrga $(0 < t < +\infty)$ nisbatan yarimgruppa tashkil qiladi deyiladi, agarda quyidagi munosabat o'rinli bo'lsa:

$$V(t_1+t_2) = V(t_1)V(t_2) \qquad (0 < t_1, \; t_2 < \infty)$$

3-ta'rif. Agar $V(t)$ yarimgruppa $t > 0$ bo'lganda tekis uzluksiz bo'lib, ixtiyoriy $x \in E$ element uchun $\lim\limits_{t \to +0} V(t)x = x$ bo'lsa, unda $V(t)$ yarimgruppa C_0 sinfga tegishli deyiladi.

Endi esa keltirilgan ta'riflardan foydalangan holda birinchi paragrafning asosiy teoremasini isbotlaymiz

1-teoremaning isboti. Teoremaning shartiga ko'ra $1 < p < \dfrac{n}{2+\tau}$ bo'lsin. Ushbu

$$H(x,D) = -\Delta + q(x)$$

operatorning normal pozitiv operator ekanligi kelib chiqadi.

$$T(\alpha) = H^{\alpha}u = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}H\left(H+tI\right)^{-1}u\,dt, \;\; u \in D\left(H\right), \tag{4}$$

belgilash kiritamiz. Ma'lumki,

$$\|T(\alpha)\|_{L_p(R^n)} = \left\| \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} H\left(H + tI\right)^{-1} u\, dt \right\|_{L_p(R^n)} \leq$$

$$\leq C \int_0^{\infty} \left|t^{\alpha}\right| \left\|(tI + H)^{-1}\right\|_{L_p(R^n)} dt \leq C_1 \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha}}{1+t} dt = C_1 B(...) = const < +\infty$$

Bunda: $C = \left| \dfrac{\sin \pi\alpha}{\pi} \right|$

Pozitiv operatorning xossasidan quyidagi munosabatlar kelib chiqadi:

$$T(\alpha + \beta) = H^{\alpha+\beta} = H^{\alpha} H^{\beta} = T(\alpha)T(\beta),$$

$$T(\alpha + \beta) = H^{\alpha+\beta} = H^{\beta+\alpha} = H^{\beta} H^{\alpha} = T(\beta)T(\alpha)$$

Ixtiyoriy $x \in D(H)$ va ixtiyoriy $\alpha,\ \alpha + \Delta\alpha \geq 0$ sonlar uchun

$$\|T(\alpha + \Delta\alpha) - T(\alpha)\|^{p}_{L_p(R^n)} = \int_{R^n} \left[T(\alpha + \Delta\alpha) - T(\alpha)\right]^{p} dx =$$

$$= \int_{R^n} \left[\int_0^{+\infty} t^{n-(\alpha+\Delta\alpha)} (H + tI)^{-n-1} dt - \int_0^{+\infty} t^{n-\alpha} (H + tI)^{-n-1} dt \right]^{p} dx =$$

$$= \int_{R^n} \left[\int_0^{+\infty} t^{n-\alpha} (t^{-\Delta\alpha} - 1)(H + tI)^{-n-1} dt \right]^{p} dx$$

oxirgi tenglikka limit bilan integralning o'rnini almashtirib quyidagi munosabatni hosil qilamiz:

$$\lim_{\Delta\alpha \to 0} \|T(\alpha + \Delta\alpha) - T(\alpha)\|^{p}_{L_p(R^n)} = 0$$

Demak,

$$H^{\alpha} u = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} H\left(H + tI\right)^{-1} u\, dt,\ \ u \in D\left(H\right),$$

formula bilan aniqlangan formula uzluksiz chegaralangan operatorlar yarim gruppasini tashkil qilar ekan.

1-teorema isbotlandi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yhati:

1. Аликулов Т.Н., Мукумов А.Х. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: межд. науч. конф. 22–27 июня 2015г. – Улан-Уде-Байкал, Россия, 2015. – С. 37–39.
2. Аликулов Т.Н., Мукумов А.Х. Дифференциальное уравнение с эллиптического оператора шредингера в банаховом пространстве // актуальные вопросы анализа: Материалы науч. конф. 22–23 апреля 2016. – карши, 2016. – С. 67–68.
3. Мукумов А.Х. Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах банаха // Matematika, mexanika va informatika fanlarining rivojida istedodli yoshlarning o'rni. Ilmiy-amaliy seminar tezislar to'plami,-Toshkent-2016. 46-47.