ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ СВОДЯЩИЕСЯ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Баймуратова Клара Амангельдиевна
Каракалпакский государственный университет имени Бердаха,

Аннотация: В данной статье рассматриваются конкретные задачи, решение которых приводит к интегрированию дифференциальных уравнений. При решении этих задач сначала составляют дифференциальное уравнение, которое затем решают тем или иным способом в зависимости от его типа. Рассматривая процессы и явления в прикладных задачах, также рассматривается возможность перевода нашего "действительного мира" на язык математики. Решение этих уравнений позволяет предсказать свойства изучаемого явления и прогнозировать конечный результат.

Ключевые слова: прикладная задача, математическая модель, составление дифференциального уравнения, производная и аргумент, дифференциал, частное решение, уравнение с разделяющимися переменными, коэффициент пропорциональности.

Изучение прикладных задач в курсе дифференциальных уравнений тесно связано с понятием математической модели, обучение построению таких моделей является одной из основных задач математического образования. Необходимо подчеркнуть то, что приложение математики не сводится просто к решению определенных задач и подбору подходящих формул. Следует включать в курс дифференциальных уравнений построение математических моделей для несложных процессов и явлений, и рассматривать возможность перевода нашего "реального мира" на язык математики. Широкое распространение дифференциальных уравнений в естествознании объясняется тем, что многие явления и процессы, происходящие в природе, количественно описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Большинство прикладных задач сводится к построению функций удовлетворяющих как некоторым обыкновенным дифференциальным уравнения, так и различным дополнительным условиям, общее число которых совпадает с порядком уравнения. Построение общего решения не элементарных дифференциальных уравнений наталкивается на принципиальные трудности. Дифференциальные уравнения объединяют и обобщают многие идеи математического анализа, раскрывают сущность метода бесконечно малых как важнейшего средства познания явлений действительности. Дифференциальные уравнения возникают при математической формулировке прикладных задач в дифференциальных символах. При составлении дифференциального уравнения задачи, в виде соотношения между дифференциалами переменных можно делать различные допущения, упрощающие задачу и вместе с тем, не отражающихся на результатах. Например, как при отыскании дифференциала неизвестной величины, здесь можно небольшой участок кривой считать прямолинейным, небольшой участок поверхности –плоским, переменное движение в течении, малого промежутка времени можно рассматривать как равномерное, а всякий физический, химический или технический процесс-как протекающий с неизменной скоростью. При составлении дифференциального уравнения задачи в виде соотношения между производными используют геометрический, физический или механический смысл производной. Кроме того, при составлении дифференциального уравнения задачи, от ее условия используют известные законы физики, химии, механики и других наук, в которых выражена зависимость между функцией, аргументом и производной. Из механики известно, что скорость, ускорение и путь при прямолинейном движении связаны соотношениями $v = s_t', a = v_t', a = s_t''$.Из электротехники известно, что сила тока есть производная количества электричества q, протекающего через проводник, по времени t т.е. $\frac{dq}{dt} = f(q,t)$.Алгоритм решения задач на составление дифференциальных уравнений следующий:[2]

1) Из переменных величин выделяют функцию и аргумент, устанавливают физический смысл функции и ее производной. Затем, используя сведения из физики, механики, электротехники и других дисциплин, выражают зависимость между функцией, ее производной и аргументом, т.е. составляют дифференциальное уравнение.

2) Определяют к какому типу относится составленное уравнение и находят общее решение.

3) Если в задаче даны начальные условия, то получают частное решение уравнения.

Составить дифференциальное уравнение – это значит найти зависимость между аргументом, функцией и ее производной (или дифференциалом). Составление дифференциальных уравнений является важным и вместе с тем трудным вопросом. Необходимо приобретение опыта и приобретение определенных навыков в решении различных задач, что достигается разбором большого количества решенных задач и самостоятельным решением аналогичных примеров. Необходимо также знание данной прикладной дисциплины. Составление дифференциальных уравнений по условию задачи (механической, физической, химической, технической или любой другой) состоит обычно в определении математической зависимости между переменными величинами и их приращениями, которые сразу же заменяются соответствующими дифференциалами. В ряде случаев дифференциальное уравнение получается без рассмотрения приращений – за счет их предварительного учета. Так, представляя скорость выражением $V = \frac{ds}{dt}$ мы не привлекаем приращений Δs и Δt, хотя они фактически учтены в силу того, что

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Ускорение в любой момент времени t выражается зависимостью

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

Изучение любого процесса сводится к определению отдельных его моментов и установлению общего закона его течения. Отдельный момент процесса (элементарный процесс) выражается дифференциальным уравнением связывающим переменные величины процесса с их дифференциалами и производными, закон общего течения процесса, получаемый после интегрирования, выражается уравнением, связывающим переменные величины процесса. Как и при составлении алгебраических уравнений при решении прикладных задач с помощью дифференциальных уравнений, многое зависит от навыков, приобретаемых упражнением. Однако здесь требуется изобретательность и глубокое понимание сути изучаемых процессов. Можно делать упрощающие допущения, например заменять существующий сложный(криволинейный) элемент прикладной задачи более простым (прямолинейным), неравномерное движение материальной точки за малый промежуток времени равномерным, предполагать скорость протекания любого процесса за малый промежуток времени постоянной. Идея замены одних бесконечно малых другими требует обязательного соблюдения эквивалентности заменяющего и заменяемого бесконечно малых элементов.[2] В случаях когда решение дифференциальных уравнений получаются в виде бесконечных разложений, возникает вопрос о существовании решения вне интервала сходимости ряда, т.е. о возможности продолжения решения уравнения за границы указанного интервала. Этот вопрос имеет принципиальное значение так как, оценка промежутка существования решения дифференциального уравнения позволяет судить о тех значениях аргумента, при которых данное дифференциальное уравнение способно моделировать изучаемый процесс. Рассмотрим конкретные задачи, решение которых приводит к интегрированию дифференциальных уравнений. При решении этих задач сначала составляют дифференциальное уравнение, которое затем решают тем или иным способом в зависимости от его типа.

Задача 1. Металлический шар, температура которого в начале опыта была равна $12^\circ C$, охлаждается струей воды, имеющей температуру 0°.Через 8 мин. шар охладился до 9°.Считая скорость охлаждения пропорциональной разности между температурой тела и температурой охлаждающей среды , определить, в течении какого времени шар охладился до 7°.[1]

Решение: Обозначим через T температуру шара, а через t- время, прошедшее после начала опыта. Тогда скорость охлаждения шара есть производная $\frac{dT}{dt}$. Согласно условию,

$T' = k(T-0) = kT$, где k –коэффициент пропорциональности. Это – уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные, имеем $\frac{dT}{dt} = kT, \frac{dT}{T} = kdt$, откуда

$\ln T = kt + \ln C$ или

$\ln T = \ln e^{kt} + \ln C, \rightarrow T = Ce^{kt}$ (1)

Чтобы найти постоянные C и k, воспользуемся данными задачи: при $t = 0$ температура шара $T = 12^{\circ}$, а при $t = 8$ она составляет $T = 9^{\circ}$.Заменяя в равенстве (1) t и T их значениями, находим

$12 = Ce^0$ и $9 = Ce^{8k}$. Из первого равенства имеем $C = 12$, из второго равенства имеем

$e^{8k} = 0{,}75$. Для нахождения e^k извлечем из обеих частей равенства корень восьмой степени:

$$e^k = \sqrt[8]{0{,}75} = 0{,}75^{1/8}.$$

Возведя в степень t обе части этого равенства, имеем $e^{kt} = 0{,}75^{t/8}$. Подставив в равенство (1) вместо C и e^{kt} найденные значения, получим

$$T = 12 \cdot (0{,}75)^{t/8} \qquad (2)$$

Прологарифмируем по основанию 10 равенство (2):

$$lg\,T = lg12 + \frac{t}{8} lg0{,}75 \text{ положим } T = 7$$

$lg7 = lg12 + \frac{t}{8} lg0{,}75$ окончательно находим

$t = \frac{8(lg7 - lg12)}{lg0{,}75} = \frac{8(0{,}8451 - 1{,}0792)}{1{,}8751} = \frac{-8 \cdot 0{,}2341}{-0{,}1249} = \frac{1{,}8728}{0{,}1249} \approx 15$ мин.

Задача 2.Сосуд вместимостью 100л наполнен рассолом, содержащим 10кг растворенной соли. За 1 мин в него втекает 3 л воды и столько же смеси перекачивается в другой сосуд той же вместимости, первоначально наполненный водой, из которого избыток жидкости выливается. В какой момент времени количество соли в обоих сосудах окажется одинаковым?[3]

Решение: Пусть в момент времени t (мин) в первом сосуде содержится x (кг) соли и пусть в последующий малый промежуток времени dt количество соли в этом сосуде уменьшится на dx. За время dt из сосуда вытечет $3dt$ (л) рассола .Концентрация рассола (количество соли в одном литре раствора) в момент t составит $\frac{x}{100}$ (кг/л).Если допустить ,что в течении малого промежутка времени

dt концентрация рассола останется неизменной, то за это время количество соли уменьшится на $-dx = \frac{x}{100} \cdot 3dt$(так как $dx < 0$) .Разделяя переменные в этом уравнении и интегрируя, получим

$$\frac{dx}{x} = -\frac{3}{100}dt;\ \ \ln x = -0{,}03t + C_1$$

Исходя из начального условия $x = 10$ при $t = 0$ определяем значение постоянной $C_1 = \ln 10$.

Следовательно, зависимость количества соли x в первом сосуде от времени t выражается равенством

$\ln x = -0.03t + \ln 10$ или $x = 10e^{-0.03t}$ (3)

Найдем теперь зависимость количества соли y от времени для второго сосуда. Во втором сосуде концентрация рассола в момент $t = \frac{y}{100}$(кг/л). За время dt в него вольется $3dt$(л) рассола, содержащих $\frac{3x}{100}dt$(кг) соли, а выльется $3dt$(л) рассола, содержащих $\frac{3y}{100}dt$(кг) соли,т.е. за время dt количество соли во втором резервуаре изменится на величину

$$dy = 0.03xdt - 0.03ydt \text{ или } dy = 0.03(x - y)dt$$

Заменяя в этом уравнении x его выражением из формулы (3), получим линейное уравнение первого порядка

$$dy = 0.03(10e^{-0.03t} - y)dt; y' + 0.03y = 0.3e^{-0.03t},$$

Общий интеграл которого, имеет вид $y = e^{-0.03t}(C_2 + 0.3t)$.Значение постоянной C_2 определяем из начальных условий; так как $y = 0$ при $t = 0$, то $C_2 = 0$ Следовательно, зависимость количества соли y во втором сосуде от времени t выражается равенством $y = 0.3te^{0.03t}$. Искомый момент времени, в который количество соли в обоих сосудах станет одинаковым, найдем, полагая

$x = y$:$10e^{-0.03t} = 0.3te^{-0.03t}; 10 = 0{,}3t; t = 33\frac{1}{3}$с .

В этот момент в каждом сосуде окажется по $10/e \approx 3.68$кг соли.

Дифференциальные уравнения возникают в тех случаях, когда исследуются процессы, в описании которых используются такие величины как скорость (быстрота) протекания процесса, изменение скорости и т.п. С помощью дифференциальных уравнений или систем таких уравнений можно создать математическую модель изучаемого физического или биологического процесса. Решение этих уравнений позволяет предсказать свойства изучаемого явления и прогнозировать конечный результат.

Литература

1. К.К.Пономарев. Составление дифференциальных уравнений. Минск 1973.
2. К.К.Пономарев. Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач.М.1962

3. Амелькин, В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В.В. Амелькин — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987. — 160 с.
4. Безручко, А.С. Возможность расширения роли практических работ в курсе дифференциальных уравнений. Инновационные технологии обучения математики в школе и вузе: Материалы XXX Всероссийского семинара преподавателей математики, высших учебных заведений (29-30 сентября 2011г., г. Елабуга). - Елабуга, 2011. - С. 112-114.
5. Найманов Б. А. Реализация прикладной направленности преподавания дифференциальных уравнений в педагогическом институте: М., 1993. – 19с.
6. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец / Н.М. Матвеев. — М.: Просвещение, 1988. – 256с.